数理解析研究所講究録
298巻 1977年 1-15

亜限界流に対する非線型安定理論

航技研　伊藤信毅

1. 序論

層流の有限振幅攪乱に対する安定性を調べる方法は Stuart[1] と Watson[2] によって体系化され，一般に Stuart-Watson の非線型安定理論と呼ばれる。この理論は(i)攪乱の振幅が小さいこと，および(ii)与えられた Reynolds 数 R と波数 α が線型理論によって定まる中立曲線の近傍にあることの二つの基本仮定の上に成り立っている。その概要は以下のようである。

二次元平行流 $U(y)$ 中に加えられた二次元攪乱が主流の方向 x に対して周期性を持つと仮定し，その流れ函数 Ψ を

$$\Psi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(y,t)\, e^{ik\alpha x} \qquad (\Psi_{-k} = \tilde{\Psi}_k) \tag{1}$$

のように Fourier 展開する。ただし，α は実数，$\sim$ は共役複素数を表わす。このとき，攪乱方程式はつぎのようになる。

$$\left(L_k - \frac{\partial}{\partial t} M_k\right)\Psi_k = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{k} N[\Psi_{k-\ell}, \Psi_\ell] + \sum_{\ell=1}^{\infty} N[\Psi_{k+\ell}, \tilde{\Psi}_\ell] \tag{2}$$

ここで，$M = \partial^2/\partial y^2 - (k\alpha)^2$，　$L_k = (\frac{1}{R} M_k - ik\alpha U) M_k + ik\alpha U''$，

$$N[\Psi_k,\Psi_l]=(il\alpha\frac{\partial\Psi_k}{\partial y}-ik\alpha\Psi_k\frac{\partial}{\partial y})M_l\Psi_l+(ik\alpha\frac{\partial\Psi_l}{\partial y}-il\alpha\Psi_l\frac{\partial}{\partial y})M_k\Psi_k .$$

いま，$A(t)$ を基本波 Ψ_1 の複素振幅を表わす微小量とし，各Fourier成分の大きさをつぎのように見積る。

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_1=A\{\phi_1^{(0)}(y)+|A|^2\psi_1(y)+O(|A|^4)\},\quad \Psi_0=|A|^2\psi_0(y)+O(|A|^4),\\&\Psi_2=A^2\psi_2(y)+O(|A|^4),\quad \Psi_k\sim O(|A|^k)\quad(k\geq 3).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

また，$A(t)$ の変化は

$$dA/dt=-A\{i\omega^{(0)}+\lambda|A|^2+O(|A|^4)\}\tag{4}$$

で与えられるものとする。以上を方程式(2)に代入し A の各べきの係数を0とおくと，A の係数から $\phi_1^{(0)}(y)$ に関する線型同次方程式が導かれる。これを同次型境界条件のもとに解くと複素固有値 $\omega^{(0)}$ および固有函数 $\phi_1^{(0)}(y)$ が定まる。固有値の実数部 $\omega_r^{(0)}$ は振動数，虚数部 $\omega_i^{(0)}$ は増幅率を表わす。この固有値問題は実際には無限個の固有値を与えるが，$\omega^{(0)}$ としてはそのうち増幅率最大のものを取ることにする。つぎに $|A|^2$ と A^2 の係数からは ψ_0 と ψ_2 を定める方程式が得られる。

$$(L_0+2\omega_i^{(0)}M_0)\psi_0=N[\phi_1^{(0)},\tilde{\phi}_1^{(0)}],\quad (L_2+2i\omega^{(0)}M_2)\psi_2=\frac{1}{2}N[\phi_1^{(0)},\phi_1^{(0)}]\tag{5}$$

この解が定まれば，$A|A|^2$ の係数から導かれる方程式

$$\{L_1+(i\omega^{(0)}-2\omega_i^{(0)})M_1\}\psi_1=-\lambda M_1\phi_1^{(0)}+N[\phi_1^{(0)},\psi_0]+N[\tilde{\phi}_1^{(0)},\psi_2]\tag{6}$$

の右辺才2項と才3項が既知量になる。(6)式は $\omega_i^{(0)}$ が十分小さければ，左辺が $\phi_1^{(0)}$ に対する同次方程式と同じ作用素を持つから，そのときは λ が可解条件

$$\lambda = \int_0^1 \Phi(y)\{N[\phi_1^{(0)}, \psi_0] + N[\tilde{\phi}_1^{(0)}, \psi_2]\}dy \Big/ \int_0^1 \Phi(y) M_1 \phi_1^{(0)} dy \qquad (7)$$

をみたす場合だけ(6)式の解が存在する。ただし，$\Phi(y)$は固有函数$\phi_1^{(0)}(y)$に対応する随伴固有函数であり，y方向の境界は$y=0$と$y=1$であると仮定している。(7)式で定まるλが撹乱振幅の時間的変化に与える有限振幅の影響を表わす量であることは(4)から明らかである。

方程式(5)を解くにあたって，Stuart[1]とWatson[2]では異なる方法を用いている。Stuartは撹乱の増幅率$\omega_i^{(0)}$が十分小さい場合を考えて$\omega_i^{(0)} \sim O(|A|^2)$と仮定し，(5)の両式に含まれる$\omega_i^{(0)}$を無視した。この結果，(3)における$\Phi_0$と$\Phi_2$は時間的に増減しない解，すなわち平衡状態にある解として扱われることになる。一方，Watsonは(5)を解く段階では$\omega_i^{(0)}$に制限を加えず，(5)式の厳密解を(6)に代入している。このことは(3)のΦ_0とΦ_2がともに$2\omega_i^{(0)}$なる増幅率を持つことを意味する。ただし，Watsonも(6)を解く段階では$\omega_i^{(0)} \sim O(|A|^2)$なる仮定を導入しているので，結果的にはStuartの方法と同様線型中立曲線の近傍でしか成り立たない理論であることに変わりはない。しかし，(5)を解くときに$\omega_i^{(0)}$に制限を加えないというWatsonの方法の特徴には注目すべきである。従来の非線型安定理論における最大の制約はそれが線型中立曲線の近傍でしか適用できない点にあるが，上に述べたWatsonの方法の特徴を発展させることによって，

この大きな制約を取り除くことができるのである。すなわちStuart−Watson理論の根底をなす二つの基本仮定のうち，仮定(i)だけに基づく理論を導くことができる。これについては次節で述べ，その適用例として線型中立曲線を持たない円管内のPoiseuille流の非線型安定性を調べた結果を§3に与える。

一方，仮定(ii)，すなわち中立曲線の近傍だけを考えるということに基礎をおき，中立曲線からの距離を微小パラメータとする漸近展開を行えば従来の非線型安定理論をより厳密な形に書き直すことができる。この理論は有限攪乱に対する限界Reynolds数あるいは平衡振幅等に関する情報を得るのに便利である。これについては§4で述べ，§5では適用例として二次元Poiseuille流の有限攪乱に対する限界Reynolds数の計算結果を示めす。

なお，§2および§4で与える基礎理論の詳細については文献3を参照されたい。

2. 振幅展開の理論

線型増幅率$\omega_i^{(0)}$の大きさに制限を加えず，攪乱振幅が小さいという仮定だけに基づいた理論を導くにはEckhaus[4]によって導入された固有函数展開の方法を用いるのが便利である。いま，方程式(2)の解をつぎのようにおく。

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_1 = \varepsilon a_1^{(0)}(t)\phi_1^{(0)}(y) + O(\varepsilon^3), \qquad \Psi_0 = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{(n)}(t)\phi_0^{(n)}(y), \\ &\Psi_2 = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_2^{(n)}(t)\phi_2^{(n)}(y), \qquad \Psi_k \sim O(\varepsilon^k) \quad (k \geq 3) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ここで，ε は攪乱の大きさを表わす微小パラメータで(3)式の $A(t)$ との間に $A(t) = \varepsilon a_1^{(0)}(t)$ の関係がある。また $\phi_k^{(n)}(y)$ は (2) の右辺を 0 においた同次方程式の固有函数である。さらに，固有函数 $\phi_k^{(n)}(y)$ に対応する随伴固有函数を $\Phi_k^{(n)}(y)$ とするとき，直交関係

$$\int_0^1 \Phi_k^{(m)}(y) M_k \phi_k^{(n)}(y)\, dy = \delta_{mn} \quad (\delta \text{ は Kronecker の } \delta) \quad (9)$$

が成り立つものとする。(8) を (2) に代入し，(9) の関係を用いると未知の振幅函数に対する連立方程式がつぎの形で得られる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_1^{(0)}}{dt} &= -i\omega^{(0)} a_1^{(0)} - \varepsilon^2\Big\{a_1^{(0)} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{10}^{(m)} a_0^{(m)} + \tilde{a}_1^{(0)} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{12}^{(m)} a_2^{(m)}\Big\} + O(\varepsilon^4), \\ \frac{da_0^{(n)}}{dt} &= -\mu_0^{(n)} a_0^{(n)} - \sigma_{01}^{(n)} |a_1^{(0)}|^2 + O(\varepsilon^2), \\ \frac{da_2^{(n)}}{dt} &= -i\omega_2^{(n)} a_2^{(n)} - \frac{1}{2}\sigma_{21}^{(n)} \{a_1^{(0)}\}^2 + O(\varepsilon^2), \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

ただし，$\sigma_{1\ell}^{(m)} = \int_0^1 \Phi_1^{(0)} N[\phi_{1-\ell}^{(0)}, \phi_\ell^{(m)}]\, dy \quad (\ell = 0, 2)$，$\sigma_{\ell 1}^{(m)} = \int_0^1 \Phi_\ell^{(m)} N[\phi_{\ell-1}^{(0)}, \phi_\ell^{(0)}]\, dy \quad (\ell = 0, 2)$，で与えられる定数，また，$a_0^{(n)}$ は実数，$a_1^{(0)}$ と $a_2^{(n)}$ は複素数である。これら無限連立方程式の解は $a_1^{(0)}$, $a_0^{(n)}$, $a_2^{(n)}$ を座標軸とする無限次元の位相空間における曲線群を表わす。この解曲線群の主要な形状を知るには，(10)式の各右辺を 0 に等しいとおいた連立方程式の解で与えられる平衡点を求め，その点の安定不安定を調べる必要がある。

まず，自明な平衡点として座標原点 $a_1^{(0)} = a_0^{(n)} = a_2^{(n)} = 0$ が存在するが，この点の安定性は線型理論の示すように，固有値 $\omega^{(0)}$

の虚数部の符号によって定まる。$\omega_i^{(0)}>0$ では原点が不安定平衡点であり攪乱振幅は最終的に増大する。$\omega_i^{(0)}<0$ ではこの平衡点は安定であって解曲線群はそこに収束する。つぎに，この位相空間中に原点以外の平衡点が存在するかどうかを調べる。もし平衡点が存在するならば，その点は(10)式の第2式と第3式の右辺を0に等しいとおいて得られる一本の曲線

$$a_0^{(n)}=-\frac{\sigma_{01}^{(n)}}{\mu_0^{(n)}}|a_1^{(0)}|^2+O(\varepsilon^2),\quad a_2^{(n)}=-\frac{\sigma_{21}^{(n)}}{2i\omega_2^{(n)}}\{a_1^{(0)}\}^2+O(\varepsilon^2) \tag{11}$$

の上にある。この曲線をLと呼ぶことにすると，L上での基本波振幅$|a_1^{(0)}|^2$の時間的変化はつぎの形に与えられる。

$$\frac{d|a_1^{(0)}|^2}{dt}=2|a_1^{(0)}|^2\left\{\omega_i^{(0)}-\varepsilon^2\lambda_r|a_1^{(0)}|^2+O(\varepsilon^4)\right\} \tag{12}$$

ただし，λ_rは次式で定義されるλの実数部である。

$$\lambda=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma_{10}^{(m)}\sigma_{01}^{(m)}}{-\mu_0^{(m)}}+\frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma_{12}^{(m)}\sigma_{21}^{(m)}}{2\omega_r^{(0)}-\omega_2^{(m)}}. \tag{13}$$

平衡点は(12)の右辺を0にする点であるから形式的には

$$|a_1^{(0)}|^2=\frac{\omega_i^{(0)}}{\varepsilon^2\lambda_r}+O(\varepsilon^2) \tag{14}$$

で与えられるが，この式は$\varepsilon\to0$と共に正または負の無限大に発散してしまう。したがって，振幅展開の理論においては有限振幅を持つ平衡点の位置は定まらない。しかし，(12)式は攪乱が有限の大きさを持つときの基本波の増幅率を与えており，もしλ_rが正ならば有限振幅の影響は攪乱を減衰させる方向に作用し，λ_rが負であれば逆に増幅作用をすることがわかる。ただし，(12)式が位相空間におけるある解曲線に沿っての

増幅率ではなく，曲線L上での増幅率を与えている点には注意を要する。

結局(10)式の解曲線の形状を特徴ずける量は$\omega_i^{(0)}$とλ_rであり，これらの量の符号によってつぎの4つの場合にわけられる。(i) $\omega_i^{(0)}<0$, $\lambda_r<0$：原点は安定平衡であるが，有限振幅の効果は攪乱を増幅させる方向に働く。このため，ある限界振幅が存在してそれより大きい振幅を持つ攪乱は増幅されるものと予想される。(ii) $\omega_i^{(0)}>0$, $\lambda_r>0$：原点は不安定平衡であるが、有限振幅効果は減衰作用をなし，有限振幅を持つ安定平衡点の存在が可能である。(iii) $\omega_i^{(0)}<0$, $\lambda_r>0$：原点は安定平衡で，有限振幅効果はその安定性を強める。(iv) $\omega_i^{(0)}>0$, $\lambda_r<0$：原点が不安定で，有限振幅効果は攪乱の成長を促進する。

本理論の特色はΦ_0とΦ_2の解として無限個の任意定数を含んだ一般解を採用し，位相空間内の解曲線群の性質に基づいて流れの安定性を論じていることである。これに対してWatsonの方法は(5)式あるいはこれと等価な(10)の第2，第3式の特解だけを考慮に入れているので，有限振幅効果を表わす量は

$$\Lambda=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma_{10}^{(m)}\sigma_{01}^{(m)}}{-2\omega_i^{(0)}-\mu_0^{(m)}}+\frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma_{12}^{(m)}\sigma_{21}^{(m)}}{2\omega^{(0)}-\omega_2^{(m)}} \tag{15}$$

となる。これと(13)で定義されたλの違いは各項の分母に$2\omega_i^{(0)}$が加わっている点だけである。一般にμ_0と$\omega_{2i}^{(0)}$は負の値を持つので(13)式では$\omega^{(0)}$が任意の値を取っても分母が0になること

はないが，(15)式では分母の実数部と虚数部がともに0になる可能性がある。すなわち，(13)式は$\omega^{(0)}$に関して連続かつ有界な函数であるが，(15)式は$\omega^{(0)}$のある点で特異点をもち，その点で無限大になってしまう。Watson の方法が中立曲線のごく近傍でしか適用できない理由は，このようにλが特異点を含み，$\omega_i^{(0)}$が特異点の虚数部より大きいことが必要だからである。

3. 円管Poiseuille流の非線型安定性

前節に与えた理論は攪乱の線型減衰率$\omega_i^{(0)}$に制限を加えていないから，線型中立曲線の存在しない円管Poiseuille流にも適用できる。この問題についてはDavey とNguyen[5]がReynolds とPotter[6]の偽問題法を用いて計算を行ない，有限振幅効果が攪乱を増幅させる働きをするという結論を得た。例えば $R=500$，$\alpha=6.2$ の場合，彼等の方法を用いると $\omega_i^{(0)}=-0.392$，$\lambda_r=-35.9$ となって，ある限界振幅(近似的には $|A|^2 \doteqdot \omega_i^{(0)}/\lambda_r=0.0109$)以上の振幅を持つ攪乱は増幅することになる。ところが，§2で与えた方法によって計算した結果は，同じRとαに対して$\lambda_r=20.3$となり，有限振幅効果は攪乱の減衰を強めることを示す。(なお詳しい計算結果については文献7を参照されたい。) このように全く相反する結果が得られた理由はDavey-Nguyenが偽問題法(文献6 §4)を円管Poiseuille流に適用したことによる。

偽問題法では はじめから増減しない平衡解を考えて

$$\Psi_k = g_k(y)\, e^{ik\omega t} \qquad (\omega：実数) \tag{16}$$

とおく。このとき，未知の振動数ωは振幅$|A|^2$の函数になるので，これをつぎのようなべき級数で表わす。

$$\omega(|A|^2) = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}|A|^2 + \omega^{(2)}|A|^4 + \cdots \tag{17}$$

ただし，係数$\omega^{(m)}$は複素数でよいことにし，$\omega^{(0)}$は線型理論の複素振動数を表わすものとする。しかし，ωが実数になるために級数(17)の虚数部は0でなければならないから，

$$\omega_i^{(0)} + \omega_i^{(1)}|A|^2 + \omega_i^{(2)}|A|^4 + \cdots = 0 \tag{18}$$

がみたされねばならない。この方程式の解として平衡振幅が決定される。ただ，この方法によって平衡振幅が求まるためには，i) 級数(17)が$|A|^2$の適当な収束半径を持つこと，および ii) 方程式(18)がその収束半径内に解を持つことの二つの条件がみたされている必要がある。ところが，Davey－Nguyen は(17)式の$\omega^{(0)}$と$\omega^{(1)}$だけを計算し，高次項を省略して平衡振幅を$|A|^2 = -\omega_i^{(0)}/\omega_i^{(1)}$で与えている。したがって，彼等の計算では上に述べた二つの条件がみたされているかどうか全く確められていない。

また，彼等の方法で定まる$\omega^{(1)}$は§2で与えたλとΛを混合させた形で与えられ，つぎのようになる。

$$\omega^{(1)} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma_{10}^{(m)}\sigma_{01}^{(m)}}{-\mu_0^{(m)}} - \frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma_{12}^{(m)}\sigma_{21}^{(m)}}{2\omega^{(0)} - \omega_2^{(m)}} . \tag{19}$$

このうち第二総和部分は Watson の方法と同じく特異点を持つ

ので，(19)で定義される$\omega^{(1)}$が意味を持つには$\omega_i^{(0)}$が特異点の虚数部より十分大きいときだけである。ところが，本節のはじめに示した数値結果の比較から，特異点の虚数部が0と$\omega_i^{(0)}$の間にあることがわかる（この問題では特異点の実数部はほゞ$\omega_r^{(0)}$と一致する。文献7参照）。したがってこの問題ではReynolds-Potterの偽問題法が使えないことになり，Davey-Nguyenの結果は全く無意味であることがわかる。

4. 中立曲線近傍での理論

§2では$\omega_i^{(0)}$に制限を加えなかったが，ここでは逆に$|\omega_i^{(0)}|$が十分小さい場合を考える。このことはRとαを線型中立曲線の近傍に取ることと同じだから，微小パラメータとして中立曲線からの距離sをとり，sが0に近づいたときに厳密になる漸近理論を導けばよい。ただし，距離sを定義するためには(R,α)平面にある曲線を定める必要があるが，この曲線は中立曲線と平行でなければ任意に定めてよい。(R,α)平面上の曲線が定まれば，それと中立曲線の交点を$s=0$とし，R，α，$\omega^{(0)}$，λ等をsのべき級数に展開することができる。これをつぎのように書く。

$$\left.\begin{aligned} R &= R_0 + R_1 s + R_2 s^2 + \cdots, & \alpha &= \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots, \\ \omega^{(0)} &= (\omega^{(0)})_0 + (\partial\omega^{(0)}/\partial s)_0 s + \cdots, & \lambda &= (\lambda)_0 + (\partial\lambda/\partial s)_0 s + \cdots. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

ただし，$(\ )_0$は点(R_0, α_0)における値である。一方，攪乱の大きさを表わす量εは全く任意な微小量であるから，これをとくにつぎのように選ぶことにする。

$$\varepsilon^2 = s \tag{21}$$

以上を§2の各式に代入し，$(\omega_i^{(0)})_0=0$に注意すると，(14)式は

$$|a_1^{(0)}|^2 = (\partial\omega_i^{(0)}/\partial s)_0 \Big/ (\lambda_r)_0 + O(s) \tag{22}$$

となる。これは$s \to 0$に対して有限値を与え，平衡振幅に対する漸近展開表示になっている。平衡振幅の漸近表示は，振幅を微小パラメータとする§2の理論では得られなかったもので，中立曲線の近傍を考えることによってのみ導かれるものである。なお，(22)の係数はすべて中立曲線上の点(R_0, α_0)だけに依存していることに注意すべきである。Stuart-Watsonの理論では中立曲線の近傍を考えているにもかかわらず，結果として得られる展開係数が与えられたRとαの函数になっているのは漸近理論として不徹底であるように思われる。

5. 二次元Poiseuille流の限界Reynolds数

§4に与えた理論は§2の理論と違って線型中立曲線が存在する場合にしか適用できない不便さがあるが，そのかわり平衡振幅に対する漸近展開式を与える点で優れている。この節ではその適用例として二次元Poiseuille流の有限攪乱に対す

る限界 Reynolds 数を定める式を導びき，数値計算の結果を示めす。

有限攪乱に対する限界 Reynolds 数を求める試みの中で最も基本的なものは Reynolds-Potter[6] の方法である。彼等は中立曲線上の最小 Reynolds 数およびそれに対応する波数で与えられる点 (R_0, α_0) の近傍を考え，(22)式の $(\partial \omega_i^{(0)}/\partial s)_0$ と $(\lambda_r)_0$ を計算した。ただし，彼等は波数が一定 $(\alpha = \alpha_0)$ になる直線に沿って s を取っているので，$s = R_0 - R$ である。このとき，(22) に s を乗じ，$|a_1^{(0)}|^2$ のかわりに実際の振幅 $|A|^2 = s|a_1^{(0)}|^2$ を用いると

$$R = R_0 + |A|^2 (\lambda_r)_0 / (\partial \omega_i^{(0)}/\partial R)_0 + O(|A|^4) \tag{23}$$

と書き直せる。Reynolds-Potter はこの式の $O(|A|^4)$ 項を省略し，限界 Reynolds 数を $|A|^2$ の一次式で表わした。$(\lambda_r)_0 / (\partial \omega_i^{(0)}/\partial R)_0$ は負の値を持つので，限界 Reynolds 数は $|A|^2$ に比例して減少し，$|A|^2 \fallingdotseq 3.1 \times 10^{-4}$ で $R = 0$ に達する。これに対して，実験結果からは限界 Reynolds 数がある振幅に対して最小値を持つであろうと予想される。限界 Reynolds 数に最小値があるかどうかを調べるには (23)式の高次項を計算する必要がある。

高次項まで含めた非線型安定理論によって限界 Reynolds 数を計算するには，攪乱の増幅率 ω_i を R，α および $|A|^2$ の函数と考え，これにつぎの二つの条件を課すことによって R と α を $|A|^2$ の函数として定めればよい。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i) 中立条件：} & \omega_i(R, \alpha, |A|^2) = 0 \ , \\ \text{ii) 限界点の条件：} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\omega_i(R, \alpha, |A|^2) = 0 \ . \end{array}\right\} \tag{24}$$

第2の条件は与えられた R と $|A|^2$ に対して ω_i が α のある値で最大値を取ることを意味する。連立方程式(24)を解くには，R，α，ω および Ψ_k をすべて $|A|^2$ のべき級数に展開する。

$$\left.\begin{array}{l} R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n |A|^{2n} \ , \quad \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |A|^{2n}, \quad \omega = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |A|^{2n}, \\ \Psi_k = A^k \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{kn}(y) |A|^{2n} \quad （ただし，\phi_{00} \equiv 0） \end{array}\right\} \tag{25}$$

さらに，(24)第2式に関連して，

$$\omega^* \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^* |A|^{2n}, \quad \Psi_k^* \equiv \frac{\partial \Psi_k}{\partial \alpha} = A^k \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{kn}^*(y) |A|^{2n}, \ \phi_{00}^* \equiv 0 \tag{26}$$

なる量を導入する。これらを攪乱方程式

$$(L_k + i\omega M_k)\Psi_k = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k} N[\Psi_{k-l}, \Psi_l] + \sum_{l=1}^{\infty} N[\Psi_{k+l}, \tilde{\Psi}_l] \tag{27}$$

およびこれを α で偏微分した式

$$(L_k + i\omega M_k)\Psi_k^* = -\left\{\frac{\partial L_k}{\partial \alpha} + i\omega\frac{\partial M_k}{\partial \alpha} + i\omega^* M_k\right\}\Psi_k + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k} N[\Psi_{k-l}, \Psi_l] + \sum_{l=1}^{\infty} N[\Psi_{k+l}, \tilde{\Psi}_l]\right\} \tag{28}$$

に代入し，$|A|^2$ の各べきの係数を0とおくと $\phi_{kn}(y)$ および $\phi_{kn}^*(y)$ に関する無限列の方程式が得られる。最低次の項から得られる方程式は $\phi_{10}(y)$ についての同次方程式で，これが線型限界点 (R_0, α_0) における固有値 ω_0 とそれに対応する固有函数を定める。ω_0，$\phi_{10}(y)$ を代入することによって，ϕ_{10}^*，ϕ_{01}，ϕ_{01}^*，ϕ_{20}，ϕ_{20}^* に対する方程式の右辺が既知量となり，これらの方程式は境界値問題として解ける。つぎに，ϕ_{11} および ϕ_{11}^* に関する方程式を解く

のであるが，方程式の左辺にある微分作用素はΦ_{10}の方程式の作用素と同じであるから，方程式右辺が可解条件をみたすときだけ解が存在する。Φ_{11}およびΦ_{11}^*に対する方程式の右辺にはそれぞれ未知量R_1，α_1，ω_1およびR_1，α_1，ω_1^*が線型に含まれているので，可解条件はつぎの形に書ける。

$$\omega_1 = c_0 + c_1 R_1 + c_2 \alpha_1 , \qquad \omega_1^* = c_0^* + c_1^* R_1 + c_2^* \alpha_1 \tag{29}$$

ここで，c_0，c_0^*，c_1，c_1^*，c_2，c_2^*は定数である。一方，(24)が任意の$|A|^2$に対して成り立つためにはω_nとω_n^*の虚数部が0になることが必要だから，(29)式の各式右辺の虚数部は0に等しくなる。この連立方程式を解けば，R_1とα_1が決定される。以下同様な過程で順次R_n，α_nを計算することができる。

数値計算の結果は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} R = 5772\,(&1.0 - 0.319|100A|^2 - 0.0574|100A|^4 + 0.245|100A|^6 \\ &- 0.102|100A|^8 - 0.0911|100A|^{10} - 0.0179|100A|^{12} + 0.218|100A|^{14} + \cdots) \end{aligned} \tag{30}$$

ここでAは平板間の中心線上$y=0$における流れ函数Ψ_1の値を表わす。級数(30)は$|100A|^2$が約0.8以上で発散し，またそれ以下の小さな振幅に対してはReynolds-Potterの一次式近似に非常に近い結果を与える。したがって，この計算からは限界Reynolds数の最小値を得ることができなかった。

参考文献

1) Stuart, J.T. 1960 J. Fluid Mech. 9, 353.

2) Watson, J. 1960 J. Fluid Mech. 9, 371.

3) 伊藤 1975 第7回乱流シンポジウム. 16.

4) Eckhaus, W. 1965 Studies in Non-Linear Stability Theory. Springer.

5) Davey, A. & Nguyen, H.P.F. 1971 J. Fluid Mech. 45, 701.

6) Reynolds, W.C. & Potter, M.C. 1967 J. Fluid Mech. 27, 465.

7) 伊藤 1973 第5回流体力学講演会講演集 83.